数理解析研究所講究録
1048 巻 1998 年 53-65

選択確率をもつ競合在庫モデルについて

On A Competitive Inventory Model With The Customer's Choice Probability

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

1 はじめに

これまでの在庫理論における研究では 1 人のプレーヤに対する一製品や多製品についての最適戦略を求めるものが多かった。ここ数年において相互間に何らかの関係をもつような複数のプレーヤに対する最適戦略を求める問題が注目をあびている [6],[7]。本稿では線的市場において客が距離に依存したある選択確率でプレーヤを選ぶとき、二人のプレーヤの最適戦略を純戦略、混合戦略という面から考察する。主な目的は発注、維持、不足に伴う総費用を最小にする最適発注量を求めることである。

2 モデル

Player I, II と呼ばれる 2 人のプレーヤがある製品を同時に販売し始め、市場を分け合う。Player I は $[0, 1]$ 区間上の位置 0 に、Player II は位置 1 に配置されている。各プレーヤの発注は期首に一度だけ可能であり、リードタイムなしに入荷される。不足が生じた場合には、バックログされないものとする。プレーヤは在庫がなければ信用を失うという意味でペナルティを受ける。在庫の余剰品に対しては維持費用がかかり、不足分に対してはペナルティ費用がかかる。

客は $[0, 1]$ 区間上に一様に分布しており、地点 x の客は確率 $1-x$ で Player I へ、確率 x で Player II へ一人一個の製品を購入しに行く。もし最初に訪れたプレーヤに在庫がなければもう一方のプレーヤへ行くものとする。客は各地点を同時に出発し、到着時間は移動距離に比例するとする。そのときの単位距離当たりの移動時間を t とおくと、計画期間は $2t$ であると考えることができ、これを一期間とする。本稿ではこの一期間問題を扱う。さらに客は任意の時刻においてプレーヤの在庫量は知らされていないものとする。このモデルでは Player I と II は非協力的であるとし、各プレーヤの目的は発注、維持、不足に伴う総費用を最小化することにある。主問題は各プレーヤが期首にどれだけ発注しておけばよいのかである。本稿で用いられる記号を以下に記述する：

b	:	市場上に与えられた客数（需要量）
z_i	:	Player $i (i=1,2)$ の発注量
r_i	:	Player i の単位当たりの販売価格
c_i	:	Player i の単位当たりの発注費用
h_i	:	Player i の単位当たりの維持費用
p_i	:	Player i の単位当たりのペナルティコスト
t	:	単位距離当たりの移動時間
$Q_i(T)$	:	時刻 T における Player i の在庫量
I^i_{j1}	:	Player i の期平均在庫量 $(j=1,\cdots,6)$
I^i_{j2}	:	Player i の期平均在庫不足量
$C^i_j(z_1, z_2)$	:	Player i の期平均総費用

そこで発注量 z_1, z_2 は独立して決定される。プレーヤは利益を得なければならないので、自然な仮定とし

て$r_i \geq c_i$を与える。 まず、発注量z_iと需要量bの関係によりいくつかの状況が考えられる。その各状況における期平均費用は以下の様に計算される。これらの計算からC_j^iは$[0,b]\times[0,b]$上で連続であるとわかる。

Situation 1: $z_1 \geq \frac{b}{2}$かつ$z_2 \geq \frac{b}{2}$の場合

この状況では到着する客すべてに供給することができ、両プレーヤ共に不足は生じない。時刻TにおけるPlayer Iの在庫量$Q_1(T)$は

$$\begin{aligned} Q_1(T) &= \begin{cases} z_1 - \int_0^{T/t}(1-x)bdx, & 0 \leq T \leq t \\ z_1 - \int_0^1 (1-x)bdx, & t \leq T \leq 2t \end{cases} \\ &= \begin{cases} z_1 - \frac{T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b, & 0 \leq T \leq t \\ z_1 - \frac{1}{2}b, & t \leq T \leq 2t \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる。このとき$I_{11}^1, I_{12}^1, C_1^1(z_1,z_2)$は次の様にして求められる：

$$\begin{aligned} I_{11}^1 &= \frac{1}{2t}\left[\int_0^t \left\{z_1 - \frac{T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b\right\} dT + \int_t^{2t}\left\{z_1 - \frac{1}{2}b\right\} dT\right] \\ &= z_1 - \frac{5}{12}b, \end{aligned}$$

$$I_{12}^1 = 0,$$

$$\begin{aligned} C_1^1(z_1,z_2) &= c_1 \cdot z_1 + h_1 \cdot I_{11}^1 + p_1 \cdot I_{12}^1 - r_1 \cdot \frac{1}{2}b \\ &= (c_1+h_1)z_1 - \left(\frac{5}{12}h_1 + \frac{1}{2}r_1\right)b. \end{aligned} \quad (1)$$

(1)はz_1に関する線形増加関数であるので、範囲$z_1 \geq \frac{b}{2}$上で$C_1^1(z_1,z_2)$を最小にする最適発注量z_1は

$$z_1^* = \frac{b}{2} \quad (2)$$

である。

一方、時刻TにおけるPlayer IIの在庫量$Q_2(T)$は

$$\begin{aligned} Q_2(T) &= \begin{cases} z_2 - \int_{1-T/t}^1 xbdx, & 0 \leq T \leq t \\ z_2 - \int_0^1 xbdx, & t \leq T \leq 2t \end{cases} \\ &= \begin{cases} z_2 - \frac{T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b, & 0 \leq T \leq t \\ z_2 - \frac{1}{2}b, & t \leq T \leq 2t \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる。$C_1^2(z_1,z_2)$はC_1^1と同様にして

$$C_1^2(z_1,z_2) = (c_2+h_2)z_2 - \left(\frac{5}{12}h_2 + \frac{1}{2}r_2\right)b. \quad (3)$$

(3)もz_2に関する線形増加関数であるので、範囲$z_2 \geq \frac{b}{2}$上で$C_1^2(z_1,z_2)$を最小にする最適発注量z_2は

$$z_2^* = \frac{b}{2} \quad (4)$$

である。もちろん(2),(4)は$z_i \geq \frac{b}{2}$を満たしている。

Situation 2: $0 \leq z_1 < \frac{b}{2}$かつ$z_2 \geq \frac{b}{2}$, $z_1 + z_2 \geq b$の場合

この状況ではSituation 1と同様にすべての客に対して供給できる。Player I側に不足が生じるが、その満たされない客はPlayer II側で満たされることになる。Player Iの在庫量$Q_1(T)$はSituation 1と同様に与えられる。$z_1 - \frac{T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b = 0$を満たす時刻$0 \leq T < t$を$t_1$とおく。そのとき$t_1$は$z_1$の関数であるとみなす

ことができ、それを$t_1(z_1)$と記すことにする。$z_1-\frac{t_1(z_1)}{t}b+\frac{\{t_1(z_1)\}^2}{2t^2}b=0$を用いると、$I_{21}^1, I_{22}^1, C_2^1(z_1,z_2)$は次の様になる：

$$\begin{aligned}
I_{21}^1 &= \frac{1}{2t}\int_0^{t_1(z_1)}\left\{z_1-\frac{T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b\right\}dT \\
&= \frac{1}{6}z_1+\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{22}^1 &= \frac{1}{2t}\left[\int_{t_1(z_1)}^{t}\left\{-z_1+\frac{T}{t}b-\frac{T^2}{2t^2}b\right\}dT+\int_t^{2t}\left\{-z_1+\frac{1}{2}b\right\}dT\right] \\
&= -\frac{5}{6}z_1+\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b+\frac{5}{12}b,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^1(z_1,z_2) &= c_1\cdot z_1+h_1\cdot I_{21}^1+p_1\cdot I_{22}^1-r_1\cdot z_1 \\
&= \left[c_1+\frac{1}{6}h_1-\frac{5}{6}p_1-r_1\right]z_1+(h_1+p_1)\left(\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b\right)+\frac{5}{12}p_1b. \qquad (5)
\end{aligned}$$

(5)を最小にするz_1を求めるために、z_1で偏微分する。ここで

$$\frac{\partial t_1(z_1)}{\partial z_1}=\frac{t^2}{(t-t_1(z_1))b}\quad,\quad \frac{\partial^2 t_1(z_1)}{\partial z_1^2}=\frac{1}{(t-t_1(z_1))}\left(\frac{\partial t_1(z_1)}{\partial z_1}\right)^2$$

を用いて整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial z_1}C_2^1(z_1,z_2) = c_1-p_1-r_1+(h_1+p_1)\frac{t_1(z_1)}{2t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}C_2^1(z_1,z_2) = \frac{(h_1+p_1)}{2t}\frac{\partial t_1(z_1)}{\partial z_1}>0$$

を得る。よって$C_2^1(z_1,z_2)$はz_1に関する狭義凸関数である。$\frac{\partial}{\partial z_1}C_2^1(z_1,z_2)=0$より

$$t_1(z_1)=\frac{2(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)}t \qquad (6)$$

を得られる。$0\le t_1<t$なので、十分条件として

$$c_1-p_1\le r_1<c_1+\frac{h_1-p_1}{2}$$

でなければならない。(6)を$z_1=\frac{t_1(z_1)}{t}b-\frac{\{t_1(z_1)\}^2}{2t^2}b$に代入すると、最適発注量

$$z_1^*=\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b \qquad (7)$$

が得られる。

一方、時刻TにおけるPlayer IIの在庫量$Q_2(T)$は

$$\begin{aligned}
Q_2(T) &= \begin{cases} z_2-\int_{1-T/t}^1 xbdx, & 0\le T\le t \\ z_2-\int_0^1 xbdx, & t\le T\le t+t_1 \\ z_2-\int_0^1 xbdx+Q_1(T-t), & t+t_1\le T\le 2t \end{cases} \\
&= \begin{cases} z_2-\frac{T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b, & 0\le T\le t \\ z_2-\frac{1}{2}b, & t\le T\le t+t_1 \\ z_1+z_2-\frac{2T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b+b, & t+t_1\le T\le 2t \end{cases}
\end{aligned}$$

で与えられる。そのとき$I_{21}^2, I_{22}^2, C_2^2(z_1, z_2)$は次の様になる：

$$
\begin{aligned}
I_{21}^2 &= \frac{1}{2t}\left[\int_0^t \left\{z_2 - \frac{T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b\right\} dT + \int_t^{t+t_1(z_1)} \left\{z_2 - \frac{1}{2}b\right\} dT \right.\\
&\quad \left. + \int_{t+t_1(z_1)}^{2t} \left\{z_1 + z_2 - \frac{2T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b + b\right\} dT\right]\\
&= \frac{1}{3}z_1 + z_2 - \frac{t_1(z_1)}{3t}z_1 + \frac{t_1(z_1)}{6t}b - \frac{7}{12}b,
\end{aligned}
$$

$$
I_{22}^2 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
C_2^2(z_1, z_2) &= c_2 \cdot z_2 + h_2 \cdot I_{21}^2 + p_2 \cdot I_{22}^2 - r_2 \cdot (b - z_1)\\
&= [c_2 + h_2]z_2 + \left[\frac{1}{3}h_2 + r_2\right] z_1 - \left[\frac{7}{12}h_2 + r_2\right] b + h_2 \left(\frac{t_1(z_1)}{6t}b - \frac{t_1(z_1)}{3t}z_1\right). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

(8) はz_2に関する線形増加関数である。よって範囲$z_2 \geq \frac{b}{2}$上で$C_2^2(z_1, z_2)$を最小にする最適発注量z_2は

$$
z_2^* = \frac{b}{2} \qquad (9)
$$

である。しかしながら (7),(9) は$z_1 + z_2 \geq b$を満たさない。従って最小化問題ではこのような状況を考える必要はない。実際、このSituationは他のSituationに帰着される。

Situation 3: $0 \leq z_1 < \frac{b}{2}$かつ$z_2 \geq \frac{b}{2}$, $z_1 + z_2 < b$の場合

この状況ではPlayer I側で満たされない客がPlayer II側に訪れても満たされるとは限らない。Player Iに関してはSituation 2と同様である。一方、時刻TにおけるPlayer IIの在庫量$Q_2(T)$はSituation 2と同様に与えられる。$z_1 + z_2 - \frac{2T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b + b = 0$を満たす時刻$t + t_1 \leq T < 2t$を$t_2$とおく。そのとき$t_2$は$z_1$と$z_2$の関数であるとみなすことができ、それを$t_2(z_1, z_2)$と記すことにする。$z_1 - \frac{t_1(z_1)}{t}b + \frac{\{t_1(z_1)\}^2}{2t^2}b = 0$と$z_1 + z_2 - \frac{2t_2(z_1,z_2)}{t}b + \frac{\{t_2(z_1,z_2)\}^2}{2t^2}b + b = 0$を用いると、$I_{31}^2, I_{32}^2, C_3^2(z_1, z_2)$は次の様になる：

$$
\begin{aligned}
I_{31}^2 &= \frac{1}{2t}\left[\int_0^t \left\{z_2 - \frac{T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b\right\} dT + \int_t^{t+t_1(z_1)} \left\{z_2 - \frac{1}{2}b\right\} dT \right.\\
&\quad \left. + \int_{t+t_1(z_1)}^{t_2(z_1,z_2)} \left\{z_1 + z_2 - \frac{2T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b + b\right\} dT\right]\\
&= -\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{12}b - \frac{t_1(z_1)}{3t}z_1 + \frac{t_1(z_1)}{6t}b + \frac{t_2(z_1, z_2)}{3t}(z_1 + z_2 - b),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{32}^2 &= \frac{1}{2t}\int_{t_2(z_1,z_2)}^{2t} \left\{-z_1 - z_2 + \frac{2T}{t}b - \frac{T^2}{2t^2}b - b\right\} dT\\
&= -\frac{2}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{2}{3}b + \frac{t_2(z_1, z_2)}{3t}(z_1 + z_2 - b),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^2(z_1, z_2) &= c_2 \cdot z_2 + h_2 \cdot I_{31}^2 + p_2 \cdot I_{32}^2 - r_2 \cdot z_2\\
&= \left[c_2 + \frac{1}{3}h_2 - \frac{2}{3}p_2 - r_2\right] z_2 - \left[\frac{1}{3}h_2 + \frac{2}{3}p_2\right] z_1 + \left[\frac{1}{12}h_2 + \frac{2}{3}p_2\right] b\\
&\quad + h_2 \left[\frac{t_1(z_1)}{6t}b - \frac{t_1(z_1)}{3t}z_1\right] + (h_2 + p_2)\frac{t_2(z_1, z_2)}{3t}(z_1 + z_2 - b). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

(10) を最小にするz_2を求めるために、z_2で偏微分する。ここで

$$
\frac{\partial t_2(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{t^2}{(2t - t_2(z_1, z_2))b} \quad , \quad \frac{\partial^2 t_2(z_1, z_2)}{\partial z_2^2} = \frac{1}{(2t - t_2(z_1, z_2))}\left(\frac{\partial t_2(z_1, z_2)}{\partial z_2}\right)^2
$$

を用いて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial z_2}C_3^2(z_1,z_2) \;=\; c_2-p_2-r_2+(h_2+p_2)\frac{t_2(z_1,z_2)}{2t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}C_3^2(z_1,z_2) \;=\; \frac{(h_2+p_2)}{2t}\frac{\partial t_2(z_1,z_2)}{\partial z_2}>0$$

を得る。よって$C_3^2(z_1,z_2)$はz_2に関する狭義凸関数である。また、$\frac{\partial}{\partial z_2}C_3^2(z_1,z_2)=0$より

$$t_2(z_1,z_2)=\frac{2(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)}t \tag{11}$$

を得られる。$t+t_1\le t_2<2t$なので、十分条件として

$$c_2+\frac{h_2-p_2}{2}+\frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1}\le r_2<c_2+h_2$$

でなければならない。(11)を$z_1+z_2-\frac{2t_2(z_1,z_2)}{t}b+\frac{\{t_2(z_1,z_2)\}^2}{2t^2}b+b=0$に代入すると、最適発注量

$$z_2^*=\frac{b}{2}+\frac{(2r_1-2c_1-h_1+p_1)^2}{2(h_1+p_1)^2}b-\frac{2(r_2-c_2-h_2)^2}{(h_2+p_2)^2}b \tag{12}$$

が得られる。ただしz_2^*は相手のプレーヤを考慮してz_1に(7)を用いている。(7),(12)は十分条件の下で$0\le z_1<\frac{b}{2}, z_2\ge\frac{b}{2}, z_1+z_2<b$を満たしている。

Situation 4: $0\le z_1<\frac{b}{2}$かつ$0\le z_2<\frac{b}{2}$の場合

この状況では各プレーヤに訪れた最初の方の客のみが満たされ、初めて訪れたプレーヤによって満たされなければその後も満たされない。時刻TにおけるPlayer Iの在庫量$Q_1(T)$は

$$\begin{aligned}Q_1(T) &= \begin{cases} z_1-\int_0^{T/t}(1-x)b\,dx, & 0\le T\le t\\ z_1-\int_0^{1}(1-x)b\,dx, & t\le T\le t+t_3\\ z_1-\int_0^{1}(1-x)b\,dx+Q_2(T-t), & t+t_3\le T\le 2t\end{cases}\\ &= \begin{cases} z_1-\frac{T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b, & 0\le T\le t\\ z_1-\frac{1}{2}b, & t\le T\le t+t_3\\ z_1+z_2-\frac{2T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b+b, & t+t_3\le T\le 2t\end{cases}\end{aligned}$$

で与えられる。一方、Player IIの在庫量$Q_2(T)$はSituation 3と同様、

$$Q_2(T) = \begin{cases} z_2-\frac{T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b, & 0\le T\le t\\ z_2-\frac{1}{2}b, & t\le T\le t+t_1\\ z_1+z_2-\frac{2T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b+b, & t+t_1\le T\le 2t\end{cases}$$

で表せる。そこでt_3は$z_2-\frac{T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b=0$を満たす時刻$0\le T<t$である。そのとき$t_3$は$z_2$の関数であるとみなすことができ、それを$t_3(z_2)$と記すことにする。$z_1-\frac{t_1(z_1)}{t}b+\frac{\{t_1(z_1)\}^2}{2t^2}b=0$と$z_2-\frac{t_3(z_2)}{t}b+\frac{\{t_3(z_2)\}^2}{2t^2}b=0$を用いると、$I_{41}^1, I_{42}^1, C_4^1(z_1,z_2)$は次の様になる：

$$\begin{aligned}I_{41}^1 &= \frac{1}{2t}\int_0^{t_1(z_1)}\left\{z_1-\frac{T}{t}b+\frac{T^2}{2t^2}b\right\}dT\\ &= \frac{1}{6}z_1+\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b,\end{aligned}$$

$$I_{42}^1 = \frac{1}{2t}\left[\int_{t_1(z_1)}^{t}\left\{-z_1+\frac{T}{t}b-\frac{T^2}{2t^2}b\right\}dT+\int_t^{t+t_3(z_2)}\left\{-z_1+\frac{1}{2}b\right\}dT\right.$$

$$+\int_{t+t_3(z_2)}^{2t}\left\{-z_1-z_2+\frac{2T}{t}b-\frac{T^2}{2t^2}b-b\right\}dT\Bigg]$$
$$= -\frac{5}{6}z_1-\frac{1}{3}z_2+\frac{7}{12}b+\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b+\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2-\frac{t_3(z_2)}{6t}b,$$

$$\begin{aligned} C_4^1(z_1,z_2) &= c_1\cdot z_1+h_1\cdot I_{41}^1+p_1\cdot I_{42}^1-r_1\cdot z_1 \\ &= \left[c_1+\frac{1}{6}h_1-\frac{5}{6}p_1-r_1\right]z_1+(h_1+p_1)\left(\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b\right) \\ &\quad +p_1\left(-\frac{1}{3}z_2+\frac{7}{12}b+\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2-\frac{t_3(z_2)}{6t}b\right). \end{aligned} \tag{13}$$

(13) を最小にする z_1 を求めるために、z_1 で偏微分する。ここで

$$\frac{\partial t_1(z_1)}{\partial z_1}=\frac{t^2}{(t-t_1(z_1))b} \quad , \quad \frac{\partial^2 t_1(z_1)}{\partial z_1^2}=\frac{1}{(t-t_1(z_1))}\left(\frac{\partial t_1(z_1)}{\partial z_1}\right)^2$$

を用いて整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial z_1}C_4^1(z_1,z_2)=c_1-p_1-r_1+(h_1+p_1)\frac{t_1(z_1)}{2t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}C_4^1(z_1,z_2)=\frac{(h_1+p_1)}{2t}\frac{\partial t_1(z_1)}{\partial z_1}>0$$

を得る。よって $C_4^1(z_1,z_2)$ は z_1 に関する狭義凸関数であるので、Situation 2 と同様に十分条件

$$c_1-p_1\le r_1<c_1+\frac{h_1-p_1}{2}$$

の下で最適発注量

$$z_1^*=\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b\left(<\frac{b}{2}\right) \tag{14}$$

を得る。また、$C_4^2(z_1,z_2)$ も同様にして

$$\begin{aligned} C_4^2(z_1,z_2) &= \left[c_2+\frac{1}{6}h_2-\frac{5}{6}p_2-r_2\right]z_2+(h_2+p_2)\left(\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2-\frac{t_3(z_2)}{6t}b\right) \\ &\quad +p_2\left(-\frac{1}{3}z_1+\frac{7}{12}b+\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b\right) \end{aligned} \tag{15}$$

となり、十分条件

$$c_2-p_2\le r_2<c_2+\frac{h_2-p_2}{2}$$

の下で最適発注量

$$z_2^*=\frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b \tag{16}$$

を得る。(14),(16) は十分条件の下で $0\le z_1<\frac{b}{2}, 0\le z_2<\frac{b}{2}$ を満たしている。

Situation 5: $z_1\ge\frac{b}{2}$ かつ $0\le z_2<\frac{b}{2}$, $z_1+z_2\ge b$ の場合

この場合には Situation 2 において Player I と II の役割を交替すればよい。よって $C_5^1(z_1,z_2), C_5^2(z_1,z_2)$ と最適発注量 z_i^* は次の様になる：

$$C_5^1(z_1,z_2)=[c_1+h_1]z_1+\left[\frac{1}{3}h_1+r_1\right]z_2-\left[\frac{7}{12}h_1+r_1\right]b+h_1\left(\frac{t_3(z_2)}{6t}b-\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2\right), \tag{17}$$

$$C_5^2(z_1,z_2) = \left[c_2 + \frac{1}{6}h_2 - \frac{5}{6}p_2 - r_2\right] z_2 + (h_2+p_2)\left(\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2 - \frac{t_3(z_2)}{6t}b\right) + \frac{5}{12}p_2 b, \tag{18}$$

$$z_1^* = \frac{b}{2}, \tag{19}$$

$$z_2^* = \frac{2(c_2 - r_2 + h_2)(r_2 - c_2 + p_2)}{(h_2+p_2)^2}b. \tag{20}$$

この状況が起こるための十分条件として

$$c_2 - p_2 \le r_2 < c_2 + \frac{h_2 - p_2}{2}$$

が成り立たなければならない。しかしながらSituation 2と同様に最小化問題ではこのような状況を考える必要はない。

Situation 6: $z_1 \ge \frac{b}{2}$かつ$0 \le z_2 < \frac{b}{2}$, $z_1 + z_2 < b$の場合

この場合にはSituation 3においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。よって$C_6^1(z_1,z_2), C_6^2(z_1,z_2)$と最適発注量$z_i^*$は次の様になる：

$$\begin{aligned} C_6^1(z_1,z_2) &= \left[c_1 + \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1 - r_1\right] z_1 - \left[\frac{1}{3}h_1 + \frac{2}{3}p_1\right] z_2 + \left[\frac{1}{12}h_1 + \frac{2}{3}p_1\right] b \\ &\quad + h_1\left[\frac{t_3(z_2)}{6t}b - \frac{t_3(z_2)}{3t}z_2\right] + (h_1+p_1)\frac{t_4(z_1,z_2)}{3t}(z_1+z_2-b), \end{aligned} \tag{21}$$

$$C_6^2(z_1,z_2) = \left[c_2 + \frac{1}{6}h_2 - \frac{5}{6}p_2 - r_2\right] z_2 + (h_2+p_2)\left(\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2 - \frac{t_3(z_2)}{6t}b\right) + \frac{5}{12}p_2 b, \tag{22}$$

$$z_1^* = \frac{b}{2} + \frac{(2r_2 - 2c_2 - h_2 + p_2)^2}{2(h_2+p_2)^2}b - \frac{2(r_1 - c_1 - h_1)^2}{(h_1+p_1)^2}b, \tag{23}$$

$$z_2^* = \frac{2(c_2 - r_2 + h_2)(r_2 - c_2 + p_2)}{(h_2+p_2)^2}b. \tag{24}$$

ただしSituation 3と同様にz_1^*は相手のプレーヤを考慮してz_2に(24)を用いている。また、$t_4(z_1,z_2)$は$z_1 + z_2 - \frac{2T}{t}b + \frac{T^2}{2t^2}b + b = 0$を満たす時刻$t + t_3 \le T < 2t$である。十分条件として

$$c_1 + \frac{h_1 - p_1}{2} + \frac{(h_1+p_1)(r_2 - c_2 + p_2)}{h_2 + p_2} \le r_1 < c_1 + h_1, c_2 - p_2 \le r_2 < c_2 + \frac{h_2 - p_2}{2}$$

でなければならない。

3 純戦略の下での平衡解析

前節で得られた最適発注量z_i^*をPlayer iの純戦略の一つとして考えてみよう。我々はこの純戦略をもとにして利得行列を与え、平衡点を見つけるという方法で解析を行う。ここでは前節で得られた条件から以下のような6つの価格領域に分割して解析を行う必要がある：

Case 1	:	$c_1 - p_1 \le r_1 < c_1 + \frac{h_1-p_1}{2}$, $c_2 - p_2 \le r_2 < c_2 + \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 2	:	$c_1 - p_1 \le r_1 < c_1 + \frac{h_1-p_1}{2}$, $c_2 + \frac{h_2-p_2}{2} + \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} \le r_2 < c_2 + h_2$
Case 3	:	Case 1,2を除いた$c_1 - p_1 \le r_1 < c_1 + \frac{h_1-p_1}{2}$
Case 4	:	$c_1 + \frac{h_1-p_1}{2} + \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} \le r_1 < c_1 + h_1$, $c_2 - p_2 \le r_2 < c_2 + \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 5	:	Case 1,4を除いた$c_2 - p_2 \le r_2 < c_2 + \frac{h_2-p_2}{2}$
Case 6	:	Case 1〜5以外

これらの各場合において純戦略の中から平衡点を求める。

Case 1.

Player Iは純戦略として$\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{I}_2 = \frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b(< b/2)$をとり、Player IIは純戦略として$\mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{II}_2 = \frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b(< b/2)$をとる。このとき、次のような利得行列を得ることができる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad\mathrm{II}_1 \quad & \quad\quad\quad \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (C_1^1(\frac{b}{2},\frac{b}{2}), C_1^2(\frac{b}{2},\frac{b}{2})) & (C_6^1(\frac{b}{2},z_2^0), C_6^2(\frac{b}{2},z_2^0)) \\ (C_3^1(z_1^0,\frac{b}{2}), C_3^2(z_1^0,\frac{b}{2})) & (C_4^1(z_1^0,z_2^0), C_4^2(z_1^0,z_2^0)) \end{pmatrix} \end{array}$$

そこでz_1^0はI_2の値を、z_2^0はII_2の値を表す。各成分の値から次のような不等式が得られる：
$c_1 - p_1 \le r_1 < c_1 + \frac{h_1-p_1}{2}$より

$$C_1^1\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right) > C_3^1\left(z_1^0,\frac{b}{2}\right).$$

連続性$C_6^1\left(\frac{b}{2},z_2^0\right) = C_4^1\left(\frac{b}{2},z_2^0\right)$と$C_4^1$の最適性より

$$C_4^1\left(z_1^0,z_2^0\right) < C_6^1\left(\frac{b}{2},z_2^0\right).$$

Player IIに対しても同様に

$$C_1^2\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right) > C_6^2\left(\frac{b}{2},z_2^0\right),$$

$$C_4^2\left(z_1^0,z_2^0\right) < C_3^2\left(z_1^0,\frac{b}{2}\right)$$

を得る。よって平衡点は$(z_1,z_2) = \left(\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b, \frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b\right)$である。

以下にその他のCaseにおける各プレーヤの純戦略とそのときの平衡点を与えておく。

Case 2.

Player Iの戦略	:	$\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{I}_2 = \frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b$
Player IIの戦略	:	$\mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{II}_2 = \frac{b}{2} + \frac{(2r_1-2c_1-h_1+p_1)^2}{2(h_1+p_1)^2}b - \frac{2(r_2-c_2-h_2)^2}{(h_2+p_2)^2}b$
平衡点	:	$(z_1,z_2) = \left(\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b, \frac{b}{2} + \frac{(2r_1-2c_1-h_1+p_1)^2}{2(h_1+p_1)^2}b - \frac{2(r_2-c_2-h_2)^2}{(h_2+p_2)^2}b\right)$

Case 3.

Player Iの戦略	:	$\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{I}_2 = \frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b$
Player IIの戦略	:	$\mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}$
平衡点	:	$(z_1,z_2) = \left(\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b, \frac{b}{2}\right)$

Case 4.

Player Iの戦略	:	$\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{I}_2 = \frac{b}{2} + \frac{(2r_2-2c_2-h_2+p_2)^2}{2(h_2+p_2)^2}b - \frac{2(r_1-c_1-h_1)^2}{(h_1+p_1)^2}b$
Player IIの戦略	:	$\mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{II}_2 = \frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b$
平衡点	:	$(z_1,z_2) = \left(\frac{b}{2} + \frac{(2r_2-2c_2-h_2+p_2)^2}{2(h_2+p_2)^2}b - \frac{2(r_1-c_1-h_1)^2}{(h_1+p_1)^2}b, \frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b\right)$

Case 5.

Player Iの戦略	:	$\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2}$
Player IIの戦略	:	$\mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}$, $\mathrm{II}_2 = \frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b$
平衡点	:	$(z_1,z_2) = \left(\frac{b}{2}, \frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b\right)$

Case 6.

Player Iの戦略	:	$\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2}$
Player IIの戦略	:	$\mathrm{II}_1 = \frac{b}{2}$
平衡点	:	$(z_1,z_2) = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$

4　混合戦略の下での平衡解析

この節では前節と異なり、2節で得られた最適発注量z_i^*をPlayer iの戦略として考え、それらの戦略において混合戦略の概念から平衡点を見つけてみよう。前節と同様に6つのCaseを考える。

Case 1.

Player Iは純戦略として$\mathrm{I}_1=\frac{b}{2}$, $\mathrm{I}_2=\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b(<b/2)$をとり、Player IIは純戦略として$\mathrm{II}_1=\frac{b}{2}$, $\mathrm{II}_2=\frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b(<b/2)$をとる。Player Iはmass$\alpha_1$で$\mathrm{I}_1$をmass$\alpha_2$で$\mathrm{I}_2$を選択するものとする。そこで$\alpha_1,\alpha_2\geq 0,\alpha_1+\alpha_2=1$。この混合戦略を$F_1(z_1)$と書く。また、Player IIはmass$\beta_1$で$\mathrm{II}_1$をmass$\beta_2$で$\mathrm{II}_2$を選択するものとする。そこで$\beta_1,\beta_2\geq 0,\beta_1+\beta_2=1$。この混合戦略を$G_1(z_2)$と書く。このとき、Player IIが混合戦略$G_1(z_2)$を用いた時のPlayer Iへの期待利得（核）$M_1(z_1,G_1)$は次の様になる：

$$
\begin{aligned}
M_1(z_1,G_1) &= \begin{cases} \beta_1C_3^1(z_1,\mathrm{II}_1)+\beta_2C_4^1(z_1,\mathrm{II}_2), & 0\leq z_1\leq b/2 \\ \beta_1C_1^1(z_1,\mathrm{II}_1)+\beta_2C_6^1(z_1,\mathrm{II}_2), & b/2\leq z_1\leq b-\mathrm{II}_2 \\ \beta_1C_1^1(z_1,\mathrm{II}_1)+\beta_2C_5^1(z_1,\mathrm{II}_2), & b-\mathrm{II}_2\leq z_1\leq b \end{cases} \\
&= [c_1+\frac{1}{6}h_1-\frac{5}{6}p_1-r_1]z_1+(h_1+p_1)\left(\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b\right)+\frac{5}{12}p_1b \\
&\quad +p_1\beta_2\left(-\frac{1}{3}z_2+\frac{1}{6}b+\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2-\frac{t_3(z_2)}{6t}b\right),0\leq z_1\leq b/2.
\end{aligned}
$$

また、Player Iが混合戦略$F_1(z_1)$を用いた時のPlayer IIへの期待利得（核）$M_2(F_1,z_2)$は次の様になる：

$$
\begin{aligned}
M_2(F_1,z_2) &= \begin{cases} \alpha_1C_6^2(\mathrm{I}_1,z_2)+\alpha_2C_4^2(\mathrm{I}_2,z_2), & 0\leq z_2\leq b/2 \\ \alpha_1C_1^2(\mathrm{I}_1,z_2)+\alpha_2C_3^2(\mathrm{I}_2,z_2), & b/2\leq z_2\leq b-\mathrm{I}_2 \\ \alpha_1C_1^2(\mathrm{I}_1,z_2)+\alpha_2C_2^2(\mathrm{I}_2,z_2), & b-\mathrm{I}_2\leq z_2\leq b \end{cases} \\
&= [c_2+\frac{1}{6}h_2-\frac{5}{6}p_2-r_2]z_2+(h_2+p_2)\left(\frac{t_3(z_2)}{3t}z_2-\frac{t_3(z_2)}{6t}b\right)+\frac{5}{12}p_2b \\
&\quad +p_2\alpha_2\left(-\frac{1}{3}z_1+\frac{1}{6}b+\frac{t_1(z_1)}{3t}z_1-\frac{t_1(z_1)}{6t}b\right),0\leq z_2\leq b/2.
\end{aligned}
$$

すべてのz_1,z_2に対して

$$
M_1(z_1,G_1)\geq v_1,\qquad M_2(F_1,z_2)\geq v_2 \tag{25}
$$

であるようなv_1,v_2は

$$
v_1=M_1(\mathrm{I}_2,G_1),\qquad v_2=M_2(F_1,\mathrm{II}_2)
$$

である。このとき$(z_1,z_2)=(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$は不等式(25)を満たしている。よって両プレーヤの最適戦略$F_1^*(z_1)$, $G_1^*(z_2)$は

$$
F_1^*(z_1)=\begin{cases} 0, & 0\leq z_1<\mathrm{I}_2 \\ 1, & \mathrm{I}_2\leq z_1\leq b \end{cases};\qquad G_1^*(z_2)=\begin{cases} 0, & 0\leq z_2<\mathrm{II}_2 \\ 1, & \mathrm{II}_2\leq z_2\leq b \end{cases}
$$

であり、平衡点は$(z_1^*,z_2^*)=(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2)$である。他のCaseでも全く同様の解析を行うことができ、その結果は前節と一致する。

5　場合分けなしの平衡解析

この節ではより一般的な方法で平衡点を求める。Playerはbより多くの発注をすることは無駄な在庫をかかえることになるので、そのような行動を決して行わない。従ってPlayerの行動を$[0,b]$に制限することができる。その範囲においてあらゆる可能性を含め、連続的な考えから混合戦略の概念により平衡

点を見つける。Player Iはmassα_1で0をmassα_2でbを$(0,b)$上では密度$f(z_1)$に従って選択するものとする。そこで$\alpha_1,\alpha_2\geq 0$, すべてのz_1に対して$f(z_1)\geq 0, \alpha_1+\int_0^b f(z_1)dz_1+\alpha_2=1$。この混合戦略を$F(z_1)$と書く。また、Player IIはmass$\beta_1$で0をmass$\beta_2$で$b$を$(0,b)$上では密度$g(z_2)$に従って選択するものとする。そこで$\beta_1,\beta_2\geq 0$, すべての$z_2$に対して$g(z_2)\geq 0, \beta_1+\int_0^b g(z_2)dz_2+\beta_2=1$。この混合戦略を$G(z_2)$と書く。このとき、Player IIが混合戦略$G(z_2)$を用いた時のPlayer Iへの期待利得$M_1(z_1,G)$は次の様になる：

$$
\begin{aligned}
M_1(z_1,G) &= \begin{cases}
\beta_1 C_4^1(0,0)+\int_0^{b/2}C_4^1(0,z_2)g(z_2)dz_2+\int_{b/2}^b C_2^1(0,z_2)g(z_2)dz_2+\beta_2 C_2^1(0,b), \\
\quad z_1=0 \\
\beta_1 C_4^1(z_1,0)+\int_0^{b/2}C_4^1(z_1,z_2)g(z_2)dz_2+\int_{b/2}^b C_2^1(z_1,z_2)g(z_2)dz_2 \\
\quad +\beta_2 C_2^1(z_1,b), \qquad 0<z_1<\frac{b}{2} \\
\beta_1 C_6^1(z_1,0)+\int_0^{b-z_1}C_6^1(z_1,z_2)g(z_2)dz_2+\int_{b-z_1}^{b/2}C_5^1(z_1,z_2)g(z_2)dz_2 \\
\quad +\int_{b/2}^b C_1^1(z_1,z_2)g(z_2)dz_2+\beta_2 C_1^1(z_1,b), \qquad \frac{b}{2}\leq z_1<b \\
\beta_1 C_5^1(b,0)+\int_0^{b/2}C_5^1(b,z_2)g(z_2)dz_2+\int_{b/2}^b C_1^1(b,z_2)g(z_2)dz_2+\beta_2 C_1^1(b,b), \\
\quad z_1=b
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\left[c_1+\frac{1}{6}h_1-\frac{5}{6}p_1-r_1\right]z_1+(h_1+p_1)\left(\frac{t_1}{3t}z_1-\frac{t_1}{6t}b\right)+\frac{5}{12}p_1 b \\
\quad +p_1\int_0^{b/2}\left(-\frac{1}{3}z_2+\frac{1}{6}b+\frac{t_3}{3t}z_2-\frac{t_3}{6t}b\right)g(z_2)dz_2+\frac{1}{6}p_1\beta_1 b, \qquad 0\leq z_1<b/2 \\
[c_1+h_1]z_1-\left(\frac{5}{12}h_1+\frac{1}{2}r_1\right)b \\
\quad +\int_0^{b/2}\left\{\left[\frac{1}{3}h_1+r_1\right]z_2-\left[\frac{h_1}{6}+\frac{r_1}{2}\right]b+h_1\left(\frac{t_3}{6t}b-\frac{t_3}{3t}z_2\right)\right\}g(z_2)dz_2 \\
\quad +\int_0^{b-z_1}\left\{\left[\frac{2}{3}h_1+\frac{2}{3}p_1+r_1\right](b-z_1-z_2)+(h_1+p_1)\frac{t_4}{3t}(z_1+z_2-b)\right\} \\
\quad g(z_2)dz_2+\beta_1\left\{-\left[\frac{2}{3}h_1+\frac{2}{3}p_1+r_1\right]z_1+\left[\frac{1}{2}h_1+\frac{2}{3}p_1+\frac{1}{2}r_1\right]b\right. \\
\quad \left.+(h_1+p_1)\frac{t_4(z_1,0)}{3t}(z_1-b)\right\}, \qquad b/2\leq z_1\leq b
\end{cases}
\end{aligned}
$$

これらをz_1で偏微分すると

$$
\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}=\begin{cases}
c_1-p_1-r_1+(h_1+p_1)\frac{t_1}{2t}, \qquad 0\leq z_1<b/2 \\
c_1+h_1-[h_1+p_1+r_1]\int_0^{b-z_1}g(z_2)dz_2+(h_1+p_1)\int_0^{b-z_1}\frac{t_4}{2t}g(z_2)dz_2 \\
\quad +\beta_1\left\{-[h_1+p_1+r_1]+(h_1+p_1)\frac{t_4(z_1,0)}{2t}\right\}, \qquad b/2\leq z_1\leq b
\end{cases}
$$

$$
\frac{\partial^2 M_1(z_1,G)}{\partial z_1^2}=\begin{cases}
\frac{1}{2t}(h_1+p_1)\frac{\partial t_1}{\partial z_1}(>0), \qquad 0\leq z_1<b/2 \\
r_1 g(b-z_1)+\frac{1}{2t}(h_1+p_1)\int_0^{b-z_1}\frac{\partial t_4}{\partial z_1}g(z_2)dz_2 \\
\quad +\beta_1\frac{1}{2t}(h_1+p_1)\frac{\partial t_4(z_1,0)}{\partial z_1}(>0), \qquad b/2\leq z_1\leq b
\end{cases}
$$

となり、$M_1(z_1,G)$はz_1の区分的凸関数であることがわかる。さらに

$$
\lim_{z_1\to b/2-0}\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}<\lim_{z_1\to b/2+0}\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}
$$

であるので、Player Iの最適戦略は唯一であることがわかる。ここで次の3つの場合を考える：

Case 1. $c_1+\frac{h_1}{2}-\frac{p_1}{2}-r_1>0$のとき

$\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}=0$を満たす最適発注量$z_1^*$を求める。$\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}=0$より

$$
t_1=\frac{2(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1}t \tag{26}
$$

を得る。$0\leq t_1<t$なので、十分条件$c_1-p_1\leq r_1<c_1+\frac{h_1-p_1}{2}$が得られる。(26)を$z_1=\frac{t_1}{t}b-\frac{t_1^2}{2t^2}b$に代入すると

$$
z_1^*=\frac{2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)}{(h_1+p_1)^2}b \tag{27}
$$

を得る。

Case 2. $c_1+\frac{h_1}{2}-\frac{p_1}{2}-r_1=0$あるいは$c_1+\frac{h_1}{2}-\frac{p_1}{2}-r_1<0, \lim_{z_1\to b/2+0}\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}\geq 0$のとき

このときのPlayer Iの最適戦略は$\frac{b}{2}$である。

Case 3. $\lim_{z_1\to b/2+0}\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}<0$のとき

このときには$0\leq z_2<b/2$でなければならず、$M_2(F,z_2)$に対しても同様の解析によりPlayer IIの最適戦略が唯一であることを用いると、$\frac{\partial M_1(z_1,G)}{\partial z_1}=0$は

$$c_1-p_1-r_1+(h_1+p_1)\frac{t_4}{2t}=0 \tag{28}$$

となる。(28) より

$$t_4=\frac{2(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1}t \tag{29}$$

を得る。$t+t_3\leq t_4<2t, t_3=\frac{2(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2}t$より十分条件$c_1+\frac{h_1-p_1}{2}+\frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2}<r_1<c_1+h_1, c_2-p_2<r_2<c_2+\frac{h_2-p_2}{2}$を得る。(29) を$z_1=\frac{2t_4}{t}b-\frac{2t_4^2}{2t^2}b-b-z_2$に代入して

$$z_1^*=\frac{b}{2}+\frac{(2r_2-2c_2-h_2+p_2)^2}{2(h_2+p_2)^2}b-\frac{2(r_1-c_1-h_1)^2}{(h_1+p_1)^2}b \tag{30}$$

を得る。そこでz_2として$z_2^*=\frac{2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)}{(h_2+p_2)^2}b$を用いている。

すべてのz_1, z_2に対して

$$M_1(z_1,G)\geq v_1^0 \quad, M_2(F,z_2)\geq v_2^0 \tag{31}$$

であるようなv_1^0, v_2^0を求めることにより平衡点を求めると３、４節で得られた結果と完全に一致する。

定理　純戦略対の中に平衡点が唯一存在する。

6　数値例

２節で得られた$z_i^*=\frac{b}{2}, \frac{2(c_i-r_i+h_i)(r_i-c_i+p_i)}{(h_i+p_i)^2}b$という値は相手プレーヤの影響を全く受けていない場合に得られる発注量と同じ結果である。よって我々は一人のプレーヤの場合には得られないCase 2,4にのみ注目する。このモデルではPlayer IとIIが対称的であるので、数値例としてCase 2のみを扱う。表1-4にパラメータ値として$h_1=3, p_1=5, h_2=3, p_2=2, b=1000$を用いた時の結果を示す。そこで費用におけるマイナスの値は利益であると考えられる。

今、我々は相互間に影響を及ぼさない場合には得られない値を示しているPlayer I側に興味がある。例えば$r_1-c_1=2.9$ではPlayer IIの価格により多少なりとも費用に変化が見られる。一方、Player IIは相手の影響を全く受けていない。

7　まとめと今後の課題

1. 我々の現モデルでは一部 (Case 2,4) を除き、プレーヤ相互間に影響のない場合に得られる結果と同じ結論が得られている。これはプレーヤ間の依存性が弱いためと思われる。プレーヤ間により関連を付けたモデルについて考察する必要がある。

2. このモデルでは両プレーヤの発注は期首に一度だけと限定した。しかしながら実際の問題では競合するプレーヤが同時に発注するとは考えがたい。そのため、発注の時期をずらしたモデルの方がより一般的であるように思われる。

3. 本稿では一期間モデルを扱ったが、現実では一期間で終えることはほとんどない。それゆえ多期間モデルへの拡張が考えられる。

4. プレーヤの在庫量が任意の時刻において全く知らされない場合を扱った。世間では在庫が不足するとどこからともなくそのような情報が伝わることがある。よって情報に対するSilent,Noisy versionが考えられる。

5. このモデルでは計算を簡略化するために各プレーヤを位置0,1に配置したが、任意の位置における場合との比較をする必要性もある。

6. 6節の例で見られるように、最適発注量z_1^*はずいぶん異なるにもかかわらず、それに対応する費用は$z_1^* = \frac{b}{2}$に対応する費用と比べてそれ程費用の差が現れていない。これらにおいて$\frac{b}{2}$という最適発注量がどの程度有効であるのかを示す必要がある。

参考文献

[1] 児玉正憲：『生産・在庫管理システムの基礎』, 九州大学出版会, 1996.

[2] 中西正雄：『小売吸引力の理論と測定』, 千倉書房, 1983.

[3] 北條仁志, 寺岡義伸：「一様な需要分布における競合在庫問題」, 京都大学数理解析研究所講究録, **No.1015**, pp.213-225, (1997).

[4] H.Hohjo : "A Competitive Inventory Model with Reallocation under Uniform Demand Distribution", To appear in *Mathematica Japonica*, **Vol.48**, (1998).

[5] H.Hotelling : "stability in competition", *Economic Journal*, **Vol.39**, pp.41-57, (1929).

[6] M. Parlar : "Game Theoretic Analysis of the Substitutable Product Inventory Problem with Random Demand", *Naval Research Logistics*, **Vol.35**, pp.397-409, (1988).

[7] Steven A.Lippman and Kevin F.McCardle : "The Competitive Newsboy", *Operations Research*, **Vol.45, No.1**, pp.54-65, (1997).

$r_2 - c_2$								
0.4								500.5
0.3						500.4	502.0	502.9
0.2					502.2	504.4	506.0	506.9
0.1			501.6	505.0	507.8	510.0	511.5	512.5
0.0	500.0	504.7	508.8	512.2	515.0	517.2	518.8	519.7
	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9 $r_1 - c_1$

表 1: Player Iの最適戦略z_1^*

$r_2 - c_2$									
0.4								499.2	
0.3						496.8	496.8	496.8	
0.2					492.8	492.8	492.8	492.8	
0.1			487.2	487.2	487.2	487.2	487.2	487.2	
0.0	480.0	480.0	480.0	480.0	480.0	480.0	480.0	480.0	
	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	$r_1 - c_1$

表 2: Player IIの最適戦略 z_2^*

$r_2 - c_2$									
0.4								-1200.0	
0.3						-1099.6	-1149.7	-1199.9	
0.2					-1048.7	-1099.0	-1149.5	-1200.2	
0.1			-946.6	-997.0	-1047.6	-1098.5	-1149.6	-1200.8	
0.0	-843.3	-893.6	-944.3	-995.3	-1046.7	-1098.3	-1150.1	-1202.0	
	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	$r_1 - c_1$

表 3: Player Iが最適戦略 z_1^*を用いた時の費用

$r_2 - c_2$									
0.4								50.0	
0.3						99.8	99.8	99.8	
0.2					149.3	149.3	149.3	149.3	
0.1			198.3	198.3	198.3	198.3	198.3	198.3	
0.0	246.7	246.7	246.7	246.7	246.7	246.7	246.7	246.7	
	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	$r_1 - c_1$

表 4: Player IIが最適戦略 z_2^*を用いた時の費用